Seminar: Logik, Gehirn, Information

Hopfield-Netze und Boltzmann-Maschinen

Jacob Halatek

12. Dezember 2007

Gliederung

Wiederholung: Feed Forward Netze

Feed Forward Netze:

In einem FFN wir die Informationsverarbeitung in Layern organisiert. Ein FFN bildet einen n-dimensionalen Inputvektor auf einen k-dimensionalen Outputvektorvektor ab.

Definition:

Input:

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Output:

$$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$$

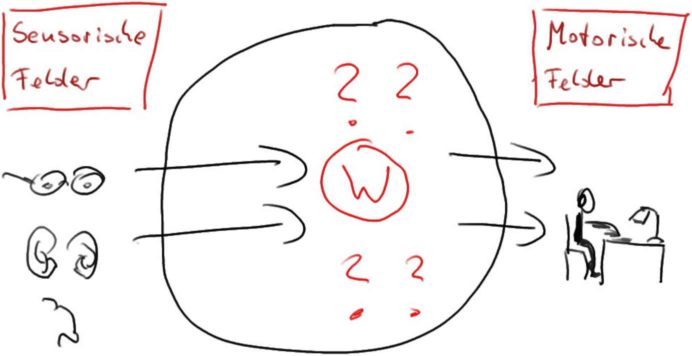
Verschaltung und Aktivierung:

$$\mathbf{xW} = \mathbf{a} \qquad sign(\mathbf{a}) = \mathbf{y} \qquad \mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times k}$$

Gliederung

Welche Struktur hat die Signalverarbeitung im Gehirn?

Feed-Forward ?



Natürliche neuronale Netze

- Das Gehirn besteht aus 10^{10}-10^{11} Neuronen
- Nur etwa 0,1% der kortikalen Pyramidenzellen sind Input-/Outputschichten zugeordnet
- Jedes Neuron bildet ungefähr 10^4 synaptische Verbindungen aus und bekommt von ebensovielen Neuronen Input
- Damit sind die meisten Neuronen in rekursiven Netzwerken organisiert und über 2-4 Synapsen selbstgekoppelt

Natürliche neuronale Netze

- Das Gehirn besteht aus 10^{10}-10^{11} Neuronen
- Nur etwa 0,1% der kortikalen Pyramidenzellen sind Input-/Outputschichten zugeordnet
- Jedes Neuron bildet ungefähr 10^4 synaptische Verbindungen aus und bekommt von ebensovielen Neuronen Input
- Damit sind die meisten Neuronen in rekursiven Netzwerken organisiert und über 2-4 Synapsen selbstgekoppelt

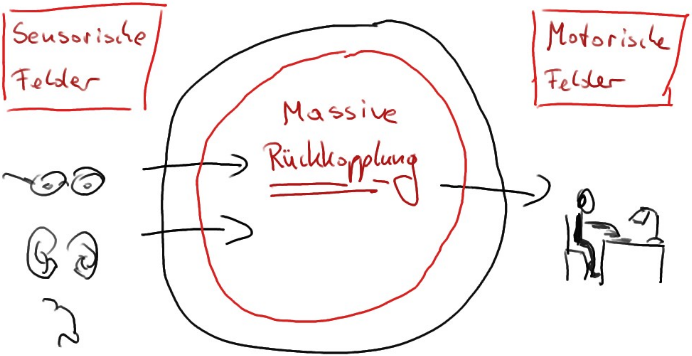
Natürliche neuronale Netze

- Das Gehirn besteht aus 10^{10}-10^{11} Neuronen
- Nur etwa 0,1% der kortikalen Pyramidenzellen sind Input-/Outputschichten zugeordnet
- Jedes Neuron bildet ungefähr 10^4 synaptische Verbindungen aus und bekommt von ebensovielen Neuronen Input
- Damit sind die meisten Neuronen in rekursiven Netzwerken organisiert und über 2-4 Synapsen selbstgekoppelt

Natürliche neuronale Netze

- Das Gehirn besteht aus 10^{10}-10^{11} Neuronen
- Nur etwa 0,1% der kortikalen Pyramidenzellen sind Input-/Outputschichten zugeordnet
- Jedes Neuron bildet ungefähr 10^4 synaptische Verbindungen aus und bekommt von ebensovielen Neuronen Input
- Damit sind die meisten Neuronen in rekursiven Netzwerken organisiert und über 2-4 Synapsen selbstgekoppelt

Feed-Forward → Rekurrente Netze → Feed-Forward



Konsequenz der Rückkopplung

- Keine klare Layer-Struktur
- Keine linearen Prozesse
- Informationsverarbeitung durch Dynamik des Systems

Konsequenz der Rückkopplung

- Keine klare Layer-Struktur
- Keine linearen Prozesse
- Informationsverarbeitung durch Dynamik des Systems

Konsequenz der Rückkopplung

- Keine klare Layer-Struktur
- Keine linearen Prozesse
- Informationsverarbeitung durch Dynamik des Systems

Gliederung

Dynamik

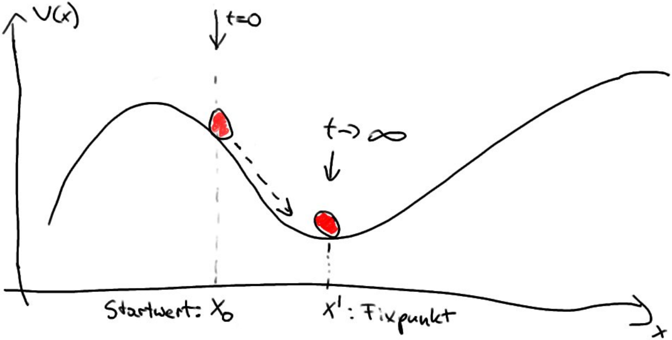
Dynamik beschreibt die Entwicklung eines System in Raum und Zeit in Form von Differenzen- oder Differentialgleichungen.

Begriffe:

- **Raum:**
  Allg. ein abstrakter Raum der von den Variablen des Systems aufgespannt wird. Zum Beispiel den Zuständen aller Neuronen.
- **Zeit:**
  - Diskret $t \in \mathbb{N}$ führt auf Differenzengleichungen: $x_{t+1} = f(x_t)$
  - Kontinuierlich $t \in \mathbb{R}$ führt auf Differentialgleichungen: $\dot{x} = f(x, t)$

Stabilität

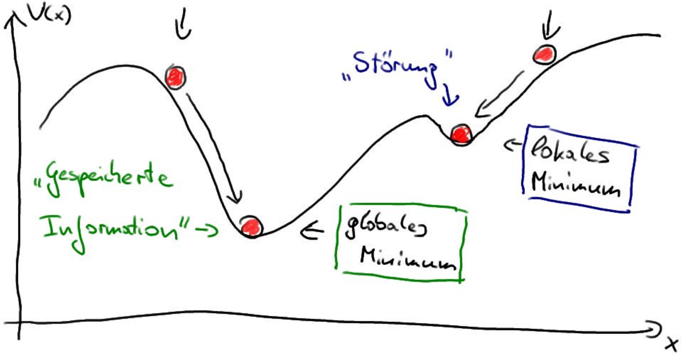
Bei der Untersuchung von dynamischen Systemen spielt die Frage nach der Existenz von Fixpunkten eine große Rolle:
Gibt es einen Zustand x', sodass sich der Zustand $x(t') = x'$ des Systems für alle $t > t'$ nicht mehr ändert?



Attractor Neuronal Networks (ANN)

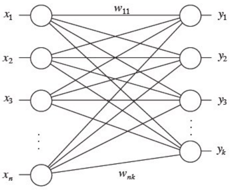
Bezug zu neuronalen Netzen:

Unterliegt ein neuronales Netz dynamischem Verhalten, so lässt sich Information allgemein in Form von Fixpunkten(Attraktoren) repräsentieren. Dabei entspricht ein neuronales Netz einer bestimmten „Energielandschaft“.



Gliederung

Übergang: Feed-Forward => Rekurrente Netze



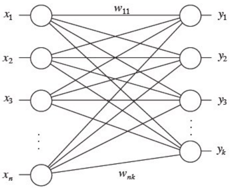
Assoziative Netze

- In einem (bidirektionalen) assoziativen Netz ist der Output vollständig an den Input gekoppelt, i.e.

$$\mathbf{x}_i \in \{-1, 1\}^n, \mathbf{y}_i \in \{-1, 1\}^k \quad \text{Zeilenvektoren}$$

- 1.Zeitschritt: $\mathbf{y}_0 = sign(\mathbf{x}_0 \mathbf{W})$
- 2.Zeitschritt: $\mathbf{x}_1^T = sign(\mathbf{W}\mathbf{y}_0^T)$
- 3.Zeitschritt: $\mathbf{y}_1 = sign(\mathbf{x}_1 \mathbf{W})$
- ...
- n.Zeitschritt: $\mathbf{y}_{n-1} = sign(\mathbf{W}\mathbf{x}_{n-1})$
- n+1.Zeitschitt: $\mathbf{x}_n^T = sign(\mathbf{W}\mathbf{y}_{n-1}^T)$

Übergang: Feed-Forward => Rekurrente Netze



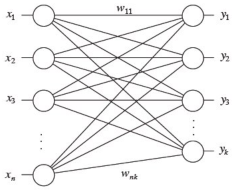
Assoziative Netze

- In einem (bidirektionalen) assoziativen Netz ist der Output vollständig an den Input gekoppelt, i.e.

$$\mathbf{x}_i \in \{-1, 1\}^n, \mathbf{y}_i \in \{-1, 1\}^k \quad \text{Zeilenvektoren}$$

  - 1.Zeitschritt: $\mathbf{y}_0 = sign(\mathbf{x}_0\mathbf{W})$
  - 2.Zeitschritt: $\mathbf{x}_1^T = sign(\mathbf{W}\mathbf{y}_0^T)$
  - 3.Zeitschritt: $\mathbf{y}_1 = sign(\mathbf{x}_1\mathbf{W})$
  - ...
  - n.Zeitschritt: $\mathbf{y}_{n-1} = sign(\mathbf{W}\mathbf{x}_{n-1})$
  - n+1.Zeitschitt: $\mathbf{x}_n^T = sign(\mathbf{W}\mathbf{y}_{n-1}^T)$

Übergang: Feed-Forward => Rekurrente Netze



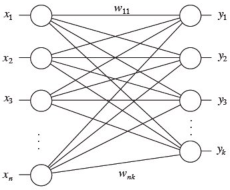
Assoziative Netze

- In einem (bidirektionalen) assoziativen Netz ist der Output vollständig an den Input gekoppelt, i.e.

$$\mathbf{x}_i \in \{-1, 1\}^n, \mathbf{y}_i \in \{-1, 1\}^k \quad \text{Zeilenvektoren}$$

- 1.Zeitschritt: $\mathbf{y}_0 = sign(\mathbf{x}_0 \mathbf{W})$
- 2.Zeitschritt: $\mathbf{x}_1^T = sign(\mathbf{W}\mathbf{y}_0^T)$
- 3.Zeitschritt: $\mathbf{y}_1 = sign(\mathbf{x}_1 \mathbf{W})$
- ...
- n.Zeitschritt: $\mathbf{y}_{n-1} = sign(\mathbf{W}\mathbf{x}_{n-1})$
- n+1.Zeitschitt: $\mathbf{x}_n^T = sign(\mathbf{W}\mathbf{y}_{n-1}^T)$

Übergang: Feed-Forward => Rekurrente Netze



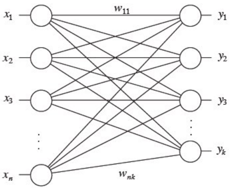
Assoziative Netze

- In einem (bidirektionalen) assoziativen Netz ist der Output vollständig an den Input gekoppelt, i.e.

$$\mathbf{x}_i \in \{-1, 1\}^n, \mathbf{y}_i \in \{-1, 1\}^k \quad \text{Zeilenvektoren}$$

  - 1.Zeitschritt: $\mathbf{y}_0 = sign(\mathbf{x}_0 \mathbf{W})$
  - 2.Zeitschritt: $\mathbf{x}_1^T = sign(\mathbf{W}\mathbf{y}_0^T)$
  - 3.Zeitschritt: $\mathbf{y}_1 = sign(\mathbf{x}_1 \mathbf{W})$
  - ...
  - n.Zeitschritt: $\mathbf{y}_{n-1} = sign(\mathbf{W}\mathbf{x}_{n-1})$
  - n+1.Zeitschitt: $\mathbf{x}_n^T = sign(\mathbf{W}\mathbf{y}_{n-1}^T)$

Übergang: Feed-Forward => Rekurrente Netze



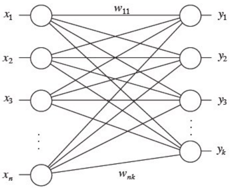
Assoziative Netze

- In einem (bidirektionalen) assoziativen Netz ist der Output vollständig an den Input gekoppelt, i.e.

$$\mathbf{x}_i \in \{-1, 1\}^n, \mathbf{y}_i \in \{-1, 1\}^k \quad \text{Zeilenvektoren}$$

  - 1.Zeitschritt: $\mathbf{y}_0 = sign(\mathbf{x}_0 \mathbf{W})$
  - 2.Zeitschritt: $\mathbf{x}_1^T = sign(\mathbf{W}\mathbf{y}_0^T)$
  - 3.Zeitschritt: $\mathbf{y}_1 = sign(\mathbf{x}_1 \mathbf{W})$
  - ...
  - n.Zeitschritt: $\mathbf{y}_{n-1} = sign(\mathbf{W}\mathbf{x}_{n-1})$
  - n+1.Zeitschitt: $\mathbf{x}_n^T = sign(\mathbf{W}\mathbf{y}_{n-1}^T)$

Übergang: Feed-Forward => Rekurrente Netze



Assoziative Netze

- In einem (bidirektionalen) assoziativen Netz ist der Output vollständig an den Input gekoppelt, i.e.

$$\mathbf{x}_i \in \{-1, 1\}^n, \mathbf{y}_i \in \{-1, 1\}^k \quad \text{Zeilenvektoren}$$

  - 1.Zeitschritt: $\mathbf{y}_0 = sign(\mathbf{x}_0 \mathbf{W})$
  - 2.Zeitschritt: $\mathbf{x}_1^T = sign(\mathbf{W}\mathbf{y}_0^T)$
  - 3.Zeitschritt: $\mathbf{y}_1 = sign(\mathbf{x}_1 \mathbf{W})$
  - ...
  - n.Zeitschritt: $\mathbf{y}_{n-1} = sign(\mathbf{W}\mathbf{x}_{n-1})$
  - n+1.Zeitschitt: $\mathbf{x}_n^T = sign(\mathbf{W}\mathbf{y}_{n-1}^T)$

Gliederung

Stabilität und Lernen

Stabilität in autoassoziativen Netzen:

Das Ziel ist, **W** derart zu trainieren, dass das neuronale Netz für verschiedene Inputvektoren $\mathbf{x}_i$ gegen bestimmte Zustände $(\mathbf{x}'_i, \mathbf{y}'_i)$ konvergiert:
Aktiviert man ein Netzwerk mit dem Input $\mathbf{x}$ so nimmt es nach endlich vielen Zeitschritten den Zustand $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ ein.

Analogie beim Menschen:

Ein bestimmter Reiz verursacht eine bestimmte Errinerung/Assoziation.
Dies geschieht nicht instantan. Es vergeht Zeit: Assoziation ist ein Prozess.

Stabilität

Gesucht sind Paare von Vektoren $(\mathbf{x}_i', \mathbf{y}_i')$, die für gegebene Inputs $\mathbf{x}$ oder $\mathbf{y}$ stationäre Zustände bilden.

- Es gilt allgemein:
  - $\mathbf{y}_i = sign(\mathbf{x}_i \mathbf{W})$
  - $\mathbf{x}_{i+1}^T = sign(\mathbf{W}\mathbf{y}_i^T)$
- Und damit lauten die Stabilitätsbedingungen:
  - $\mathbf{y} = sign(\mathbf{W}\mathbf{x})$
  - $\mathbf{x}^T = sign(\mathbf{W}\mathbf{y}^T)$

Stabilität

Gesucht sind Paare von Vektoren $(\mathbf{x}'_i, \mathbf{y}'_i)$, die für gegebene Inputs $\mathbf{x}$ oder $\mathbf{y}$ stationäre Zustände bilden.

- Es gilt allgemein:
  - $\mathbf{y}_i = sign(\mathbf{x}_i \mathbf{W})$
  - $\mathbf{x}_{i+1}^T = sign(\mathbf{W}\mathbf{y}_i^T)$
- Und damit lauten die Stabilitätsbedingungen:
  - $\mathbf{y} = sign(\mathbf{W}\mathbf{x})$
  - $\mathbf{x}^T = sign(\mathbf{W}\mathbf{y}^T)$

Hebb'sche Lernregel und Stabilität

Hebb'sche Lernregel:

Das Synapsengewicht soll:

- erhöht werden wenn zwei Neuronen x_i und y_j gemeinsam aktiv, i.e.

$$x_i(t) = y_j(t) = 1$$

- verringert werden werden wenn dies nicht der Fall ist, i.e.

$$x_i(t) \neq y_j(t)$$

Definition:

Änderung des Synapsengewichtes w_{ij}:

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) + \Delta w_{ij}$$

$$\Delta w_{ij} = \gamma x_i(t) y_j(t)$$

γ : Lernparameter

Die Verschaltungsmatrix ändert sich demnach mit:

$$\mathbf{W} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

Hebb'sche Lernregel und Stabilität

Hebb'sche Lernregel:

Das Synapsengewicht soll:

- erhöht werden wenn zwei Neuronen x_i und y_j gemeinsam aktiv, i.e.

$$x_i(t) = y_j(t) = 1$$

- verringert werden werden wenn dies nicht der Fall ist, i.e.

$$x_i(t) \neq y_j(t)$$

Definition:

Änderung des Synapsengewichtes w_{ij}:

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) + \Delta w_{ij}$$

$$\Delta w_{ij} = \gamma x_i(t) y_j(t)$$

γ : Lernparameter

Die Verschaltungsmatrix ändert sich demnach mit:

$$\mathbf{W} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

Hebb'sche Lernregel und Stabilität

Hebb'sche Lernregel:

Das Synapsengewicht soll:

- erhöht werden wenn zwei Neuronen x_i und y_j gemeinsam aktiv, i.e.

$$x_i(t) = y_j(t) = 1$$

- verringert werden werden wenn dies nicht der Fall ist, i.e.

$$x_i(t) \neq y_j(t)$$

Definition:

Änderung des Synapsengewichtes w_{ij}:

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) + \Delta w_{ij}$$

$$\Delta w_{ij} = \gamma x_i(t) y_j(t)$$

γ : Lernparameter

Die Verschaltungsmatrix ändert sich demnach mit:

$$\mathbf{W} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

Hebb'sche Lernregel und Stabilität

Hebb'sche Lernregel:

Das Synapsengewicht soll:

- erhöht werden wenn zwei Neuronen x_i und y_j gemeinsam aktiv, i.e.

$$x_i(t) = y_j(t) = 1$$

- verringert werden werden wenn dies nicht der Fall ist, i.e.

$$x_i(t) \neq y_j(t)$$

Definition:

Änderung des Synapsengewichtes w_{ij}:

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) + \Delta w_{ij}$$

$$\Delta w_{ij} = \gamma x_i(t) y_j(t)$$

γ : Lernparameter

Die Verschaltungsmatrix ändert sich demnach mit:

$$\mathbf{W} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

Vergleich mit den Stabilitätsbedingungen:

Durch Hebb'sches Lernen lässt sich demnach eine Verschaltungsmatrix gewinnen die die geforderten Stabilitätskriterien erfüllt:

- $\mathbf{y} = sign(\mathbf{x}\mathbf{W}) = sign(\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{y}) = sign(\|\mathbf{x}\|^2\mathbf{y}) = \mathbf{y}$
- $\mathbf{x}^T = sign(\mathbf{W}\mathbf{y}^T) = ... = \mathbf{x}^T$

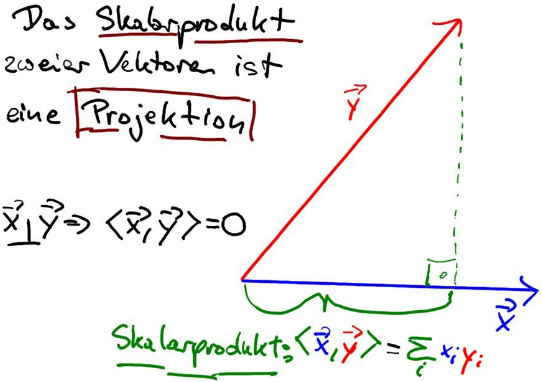
Ergebnis:

Hebb'sches Lernen kann genutzt werden um Vektorpaare $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ in einem assoziativen Netz zu speichern.

Gliederung

Das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist eine Zahl.
Es ist umso größer, je kleiner der Winkel zwischen beiden Vektoren ist.



Die Energiefunktion

- Es sei $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ein stationärer Zustand. $\mathbf{x}_0$ der Anfangswert.
- Nach $n + 1$ Zeitschritten beträgt der Aktivierungsvektor $\mathbf{a}^T$:

$$\mathbf{a}^T = \mathbf{W}\mathbf{y}_n^T$$

- Dieser Zustand ist stabil, wenn $sign(\mathbf{a}) = \mathbf{x}_n$ gilt.
- Dies ist erfüllt, wenn der Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{x}_n$ klein genug ist.
- Das Skalarprodukt $\mathbf{x}_n\mathbf{a}^T = \mathbf{x}_n\mathbf{W}\mathbf{y}_n^T$ ist in diesem Fall groß.

Die Energiefunktion:

$$E(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}_i\mathbf{W}\mathbf{y}_i^T$$

wird mit jedem Zeitschritt kleiner.

Die Energiefunktion

- Es sei $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ein stationärer Zustand. $\mathbf{x}_0$ der Anfangswert.
- Nach $n+1$ Zeitschritten beträgt der Aktivierungsvektor $\mathbf{a}^T$:

$$\mathbf{a}^T = \mathbf{W}\mathbf{y}_n^T$$

- Dieser Zustand ist stabil, wenn $sign(\mathbf{a}) = \mathbf{x}_n$ gilt.
- Dies ist erfüllt, wenn der Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{x}_n$ klein genug ist.
- Das Skalarprodukt $\mathbf{x}_n\mathbf{a}^T = \mathbf{x}_n\mathbf{W}\mathbf{y}_n^T$ ist in diesem Fall groß.

Die Energiefunktion:

$$E(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}_i\mathbf{W}\mathbf{y}_i^T$$

wird mit jedem Zeitschritt kleiner.

Die Energiefunktion

- Es sei $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ein stationärer Zustand. $\mathbf{x}_0$ der Anfangswert.
- Nach $n + 1$ Zeitschritten beträgt der Aktivierungsvektor $\mathbf{a}^T$:

$$\mathbf{a}^T = \mathbf{W}\mathbf{y}_n^T$$

- Dieser Zustand ist stabil, wenn $sign(\mathbf{a}) = \mathbf{x}_n$ gilt.
- Dies ist erfüllt, wenn der Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{x}_n$ klein genug ist.
- Das Skalarprodukt $\mathbf{x}_n\mathbf{a}^T = \mathbf{x}_n\mathbf{W}\mathbf{y}_n^T$ ist in diesem Fall groß.

Die Energiefunktion:

$$E(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}_i\mathbf{W}\mathbf{y}_i^T$$

wird mit jedem Zeitschritt kleiner.

Die Energiefunktion

- Es sei $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ein stationärer Zustand. $\mathbf{x}_0$ der Anfangswert.
- Nach $n+1$ Zeitschritten beträgt der Aktivierungsvektor $\mathbf{a}^T$:

$$\mathbf{a}^T = \mathbf{W}\mathbf{y}_n^T$$

- Dieser Zustand ist stabil, wenn $sign(\mathbf{a}) = \mathbf{x}_n$ gilt.
- Dies ist erfüllt, wenn der Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{x}_n$ klein genug ist.
- Das Skalarprodukt $\mathbf{x}_n\mathbf{a}^T = \mathbf{x}_n\mathbf{W}\mathbf{y}_n^T$ ist in diesem Fall groß.

Die Energiefunktion:

$$E(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}_i\mathbf{W}\mathbf{y}_i^T$$

wird mit jedem Zeitschritt kleiner.

Die Energiefunktion

- Es sei $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ein stationärer Zustand. $\mathbf{x}_0$ der Anfangswert.
- Nach $n + 1$ Zeitschritten beträgt der Aktivierungsvektor $\mathbf{a}^T$:

$$\mathbf{a}^T = \mathbf{W}\mathbf{y}_n^T$$

- Dieser Zustand ist stabil, wenn $sign(\mathbf{a}) = \mathbf{x}_n$ gilt.
- Dies ist erfüllt, wenn der Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{x}_n$ klein genug ist.
- Das Skalarprodukt $\mathbf{x}_n\mathbf{a}^T = \mathbf{x}_n\mathbf{W}\mathbf{y}_n^T$ ist in diesem Fall groß.

Die Energiefunktion:

$$E(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}_i\mathbf{W}\mathbf{y}_i^T$$

wird mit jedem Zeitschritt kleiner.

Die Energiefunktion

- Es sei $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ein stationärer Zustand. $\mathbf{x}_0$ der Anfangswert.
- Nach $n + 1$ Zeitschritten beträgt der Aktivierungsvektor $\mathbf{a}^T$:

$$\mathbf{a}^T = \mathbf{W}\mathbf{y}_n^T$$

- Dieser Zustand ist stabil, wenn $sign(\mathbf{a}) = \mathbf{x}_n$ gilt.
- Dies ist erfüllt, wenn der Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{x}_n$ klein genug ist.
- Das Skalarprodukt $\mathbf{x}_n\mathbf{a}^T = \mathbf{x}_n\mathbf{W}\mathbf{y}_n^T$ ist in diesem Fall groß.

Die Energiefunktion:

$$E(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}_i\mathbf{W}\mathbf{y}_i^T$$

wird mit jedem Zeitschritt kleiner.

Gliederung

Hopfield-Netz

Definition:

Ein Hopfield-Netz ist:

- vollständig verschaltet, i.e. jedes Neuron ist mit allen anderen verbunden
- asynchron, i.e. in jedem Zeitschritt wir nur der Zustand eines Neurons aktualisiert
- autoassoziativ, i.e. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ (nur eine Schicht), mit
- symmetrischer Verschaltungsmatrix $\mathbf{W} = \mathbf{W}^T$, i.e. $w_{ij} = w_{ji}$
- ohne Selbstkopplung, i.e. $w_{ij} = 0$ für $i = j$

Hopfield-Netz

Definition:

Ein Hopfield-Netz ist:

- vollständig verschaltet, i.e. jedes Neuron ist mit allen anderen verbunden
- asynchron, i.e. in jedem Zeitschritt wir nur der Zustand eines Neurons aktualisiert
- autoassoziativ, i.e. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ (nur eine Schicht), mit
- symmetrischer Verschaltungsmatrix $\mathbf{W} = \mathbf{W}^T$, i.e. $w_{ij} = w_{ji}$
- ohne Selbstkopplung, i.e. $w_{ij} = 0$ für $i = j$

Hopfield-Netz

Definition:

Ein Hopfield-Netz ist:

- vollständig verschaltet, i.e. jedes Neuron ist mit allen anderen verbunden
- asynchron, i.e. in jedem Zeitschritt wir nur der Zustand eines Neurons aktualisiert
- autoassoziativ, i.e. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ (nur eine Schicht), mit
- symmetrischer Verschaltungsmatrix $\mathbf{W} = \mathbf{W}^T$, i.e. $w_{ij} = w_{ji}$
- ohne Selbstkopplung, i.e. $w_{ij} = 0$ für $i = j$

Hopfield-Netz

Definition:

Ein Hopfield-Netz ist:

- vollständig verschaltet, i.e. jedes Neuron ist mit allen anderen verbunden
- asynchron, i.e. in jedem Zeitschritt wir nur der Zustand eines Neurons aktualisiert
- autoassoziativ, i.e. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ (nur eine Schicht), mit
- symmetrischer Verschaltungsmatrix $\mathbf{W} = \mathbf{W}^T$, i.e. $w_{ij} = w_{ji}$
- ohne Selbstkopplung, i.e. $w_{ij} = 0$ für $i = j$

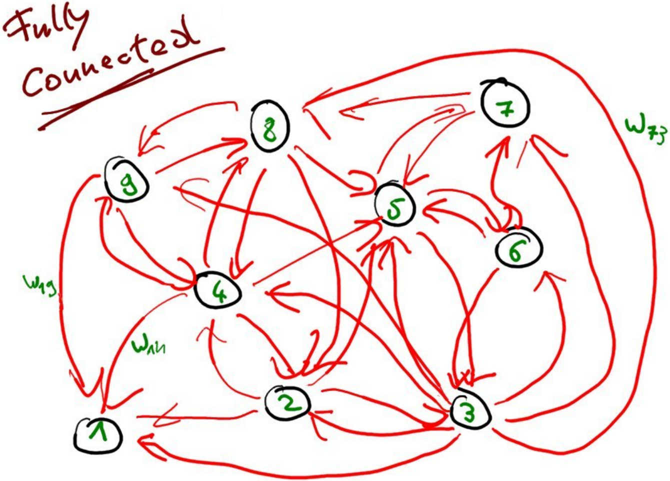
Hopfield-Netz

Definition:

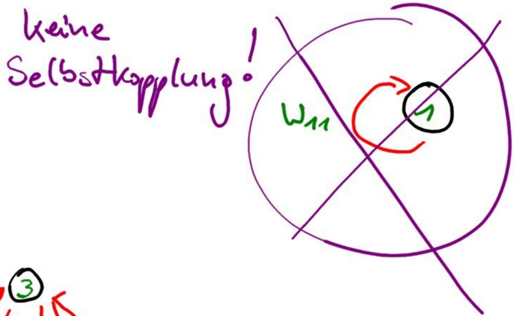
Ein Hopfield-Netz ist:

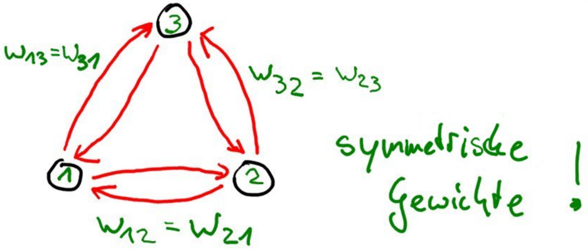
- vollständig verschaltet, i.e. jedes Neuron ist mit allen anderen verbunden
- asynchron, i.e. in jedem Zeitschritt wir nur der Zustand eines Neurons aktualisiert
- autoassoziativ, i.e. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ (nur eine Schicht), mit
- symmetrischer Verschaltungsmatrix $\mathbf{W} = \mathbf{W}^T$, i.e. $w_{ij} = w_{ji}$
- ohne Selbstkopplung, i.e. $w_{ij} = 0$ für $i = j$

Vollständig verschaltet und autoassoziativ



Symmetrische Gewichte ohne Selbskopplung





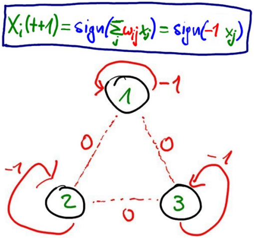
Zur Notwendigkeit der Bedingungen

Verschaltung und Selbstkopplung:

Betrachte die Matrix:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Jeder Zustand oszilliert in $\{-1, 1\}$

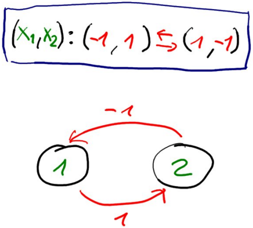


Symmetrie:

Betrachte die Matrix:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Oszillation der Zustände in $\{(-1, 1), (1, -1)\}$



Zur Notwendigkeit der Bedingungen

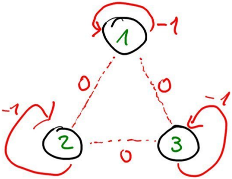
Verschaltung und Selbstkopplung:

Betrachte die Matrix:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Jeder Zustand oszilliert in $\{-1, 1\}$

$$\boxed{x_i(t+1) = \mathrm{sign}\Big(\sum_j w_{ij} x_j\Big) = \mathrm{sign}(-1\; x_j)}$$



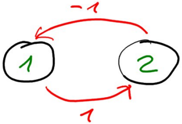
Symmetrie:

Betrachte die Matrix:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Oszillation der Zustände in $\{(-1, 1), (1, -1)\}$

$$\boxed{(x_1, x_2) : (-1, 1) \leftrightarrows (1, -1)}$$



Gliederung

Energiefunktion für das Hopfield-Netz

Definition:(Energiefunktion)

Es sei:

- $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Verschaltungsmatrix
- $\mathbf{x} \in \{-1, 1\}^n$ der Zustandsvektor
- $\Theta \in \mathbb{R}^n$ der Schwellenwert-Vektor

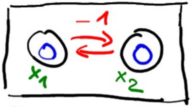
Dann lassen sich Energiefunktion und Zustandsänderung wie folgt definieren:

$$E(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\mathbf{xWx}^T + \Theta\mathbf{x}^T \quad \text{Zustand: } \mathbf{x}_i(t+1) = sign\left(-\frac{\partial E}{\partial x_i}\right)$$

Als Summe:

$$E(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} w_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n}\Theta_i x_i$$

Beispiel: Flip-Flop

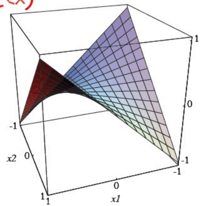


$\Theta_{1/2} = 0$

$\omega_{12} = \omega_{21} = -1$

$\boxed{E(x) = x_1 x_2}$

$E(x)$

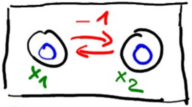


Ein Flop-Flop kann zwei logisch komplementäre Zustände speichern.

- Flip-Flop:
  - $$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
  - $$\Theta_{1/2} = 0$$
  - $$E(\mathbf{x}) = x_1 x_2$$
- Stabile Zustände:$(E(\mathbf{x}) = min)$

$$(1, -1), (-1, 1)$$

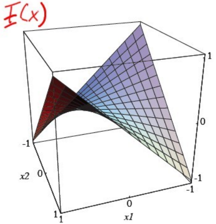
Beispiel: Flip-Flop



$\Theta_{1/2} = 0$

$\omega_{12} = \omega_{21} = -1$

$\boxed{E(x) = x_1 x_2}$

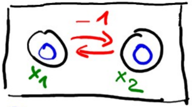


Ein Flop-Flop kann zwei logisch komplementäre Zustände speichern.

- Flip-Flop:
  - $$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
  - $$\Theta_{1/2} = 0$$
  - $$E(\mathbf{x}) = x_1 x_2$$
- Stabile Zustände: $(E(\mathbf{x}) = min)$

$$(1, -1), (-1, 1)$$

Beispiel: Flip-Flop

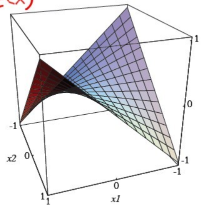


$\Theta_{1/2} = 0$

$\omega_{12} = \omega_{21} = -1$

$\boxed{E(x) = x_1 x_2}$

$E(x)$

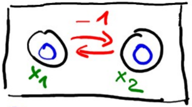


Ein Flop-Flop kann zwei logisch komplementäre Zustände speichern.

- Flip-Flop:
    - $$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
    - $$\Theta_{1/2} = 0$$
    - $$E(\mathbf{x}) = x_1 x_2$$
- Stabile Zustände: $(E(\mathbf{x}) = min)$

$$(1, -1), (-1, 1)$$

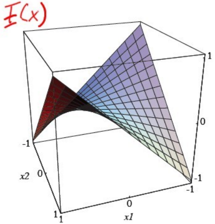
Beispiel: Flip-Flop



$\Theta_{1/2} = 0$

$\omega_{12} = \omega_{21} = -1$

$\boxed{E(x) = x_1 x_2}$



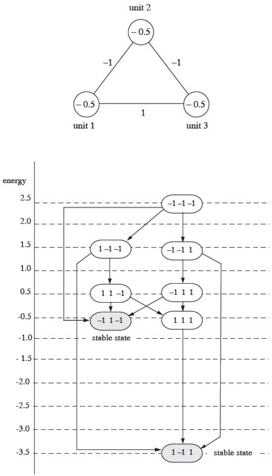
Ein Flop-Flop kann zwei logisch komplementäre Zustände speichern.

- Flip-Flop:
  -
  $$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
  -
  $$\Theta_{1/2} = 0$$
  -
  $$E(\mathbf{x}) = x_1 x_2$$

- Stabile Zustände: $(E(\mathbf{x}) = min)$

$$(1, -1), (-1, 1)$$

Konvergenz



Satz

Ein Hopfield-Netz erreicht immer ein (lokales) Minimum:

Die Energiefunktion

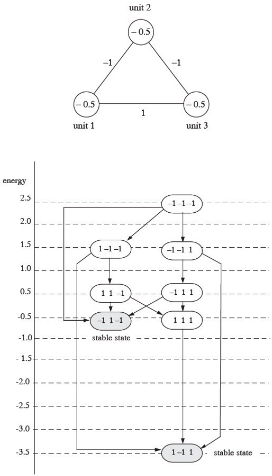
$$E(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{x}\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}^T + \Theta\boldsymbol{x}^T$$

ist für gegebenen Anfangswert monoton fallend und nach unten beschränkt.

Beispiel:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta_{1/2/3} = 0.5$$

Konvergenz



Satz

Ein Hopfield-Netz erreicht immer ein (lokales) Minimum:
Die Energiefunktion

$$E(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{x}\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}^T + \Theta\boldsymbol{x}^T$$

ist für gegebenen Anfangswert monoton fallend und nach unten beschränkt.

Beispiel:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \Theta_{1/2/3} = 0.5$$

Gliederung

Anwendungen

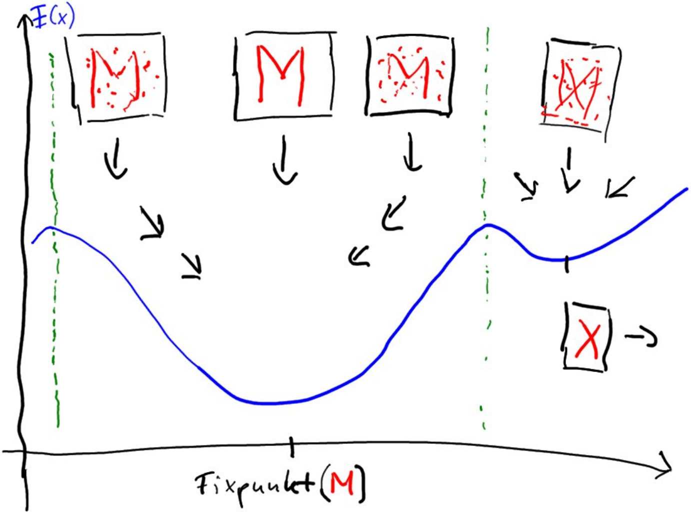
Mustererkennung

- Bilderkennung
- Texterkennung
- Datenerkennung

Lösung kombinatorischer Probleme

- Verteilung von Objekten unter Nebenbedingungen
- Optimierung (Travelling Salesman)

Beispiel: Mustererkennung



Zusammenfassung: Hopfield

Vorteile:

- Rekkurrente Netze
  => Assoziativer Speicher
- Äquivalent zu ML-Perceptron (Lernen)
- Konvergenz auch für verrauschten Input
- Gegenüber FFN biologisch plausibler:
  Dynamik durch Rückkopplung und dadurch
- Modellierung von „Zeit“

Grenzen:

- Diskretes Modell => Diskreter Zustandsraum
- Lokale Minima sind stationäre Zustände
- Volle Verschaltung ist biologisch nicht haltbar

Lösungen:

- Kontinuierliche Modelle
- Stochastische Modelle

Zusammenfassung: Hopfield

Vorteile:

- Rekkurrente Netze
  => Assoziativer Speicher
- Äquivalent zu ML-Perceptron (Lernen)
- Konvergenz auch für verrauschten Input
- Gegenüber FFN biologisch plausibler:
  Dynamik durch Rückkopplung und dadurch
- Modellierung von „Zeit“

Grenzen:

- Diskretes Modell => Diskreter Zustandsraum
- Lokale Minima sind stationäre Zustände
- Volle Verschaltung ist biologisch nicht haltbar

Lösungen:

- Kontinuierliche Modelle
- Stochastische Modelle

Zusammenfassung: Hopfield

Vorteile:

- Rekkurrente Netze
  => Assoziativer Speicher
- Äquivalent zu ML-Perceptron (Lernen)
- Konvergenz auch für verrauschten Input
- Gegenüber FFN biologisch plausibler:
  Dynamik durch Rückkopplung und dadurch
- Modellierung von „Zeit“

Grenzen:

- Diskretes Modell => Diskreter Zustandsraum
- Lokale Minima sind stationäre Zustände
- Volle Verschaltung ist biologisch nicht haltbar

Lösungen:

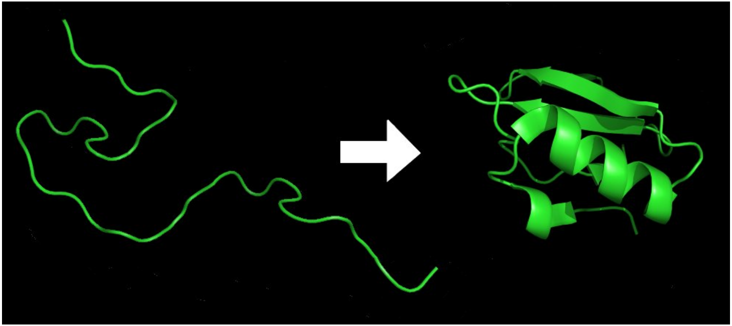
- Kontinuierliche Modelle
- Stochastische Modelle

Gliederung

Beispiel aus der Molekularbiologie: Proteinfaltung

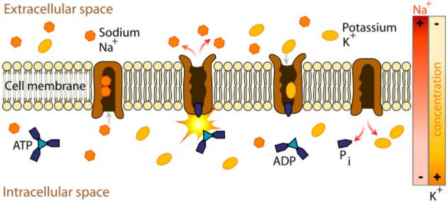
Proteinfaltung

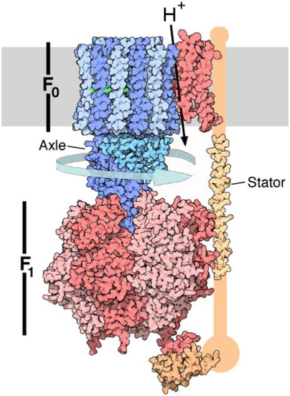
Wie falte ich eine Kette von tausenden Aminosäuren in eine exakte Struktur?
Struktur => Funktion



Beispiel für Funktion: Ionenpumpen

Was passiert nachdem ein Neuron gefeuert hat?
Wer pumpt die Ionen aus der Zelle?

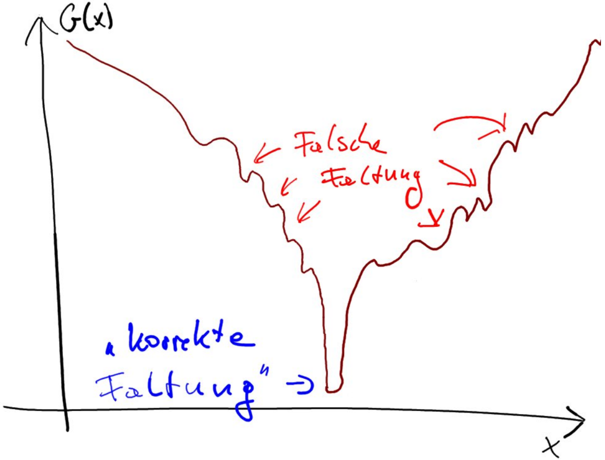




Landschaft der freien Energie

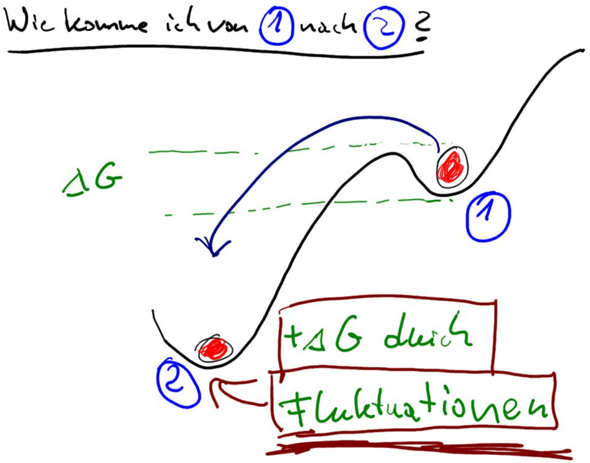
Problem

Komplexes System => Sehr viele lokale Gleichgewichtspunkte



Fluktuationen

Wie komme ich aus einem lokalen Minimum heraus?



Gliederung

Boltzmann-Maschine(BM)

Unterschied zu Hopfield-Netzen: Wahrscheinlichkeit für Zustandswechsel

Definition:(Boltzmann-Maschine)

Eine Boltzmann-Maschine ist ein Hopfield-Netz mit folgendem Zustandswechsel:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_i \\ 0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p_i \end{cases}$$

und Wahrscheinlichkeiten p_i

$$p_i = \frac{1}{1 + e^{\frac{-\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j - \Theta_i}{T}}}$$

Qualitatives Verhalten der BM

Abhängigkeit von T:

- $T \rightarrow 0 \;\Rightarrow$ Diskretes Hopfield Modell
- $T > 0 \;\Rightarrow\; p_i > 0$ auch für $\sum_{j=0}^{n} w_{ij} x_j - \Theta_i < 0$
  Neuronen können auch feuern wenn Schwellenwert nicht erreicht wurde

Analogie zum Gehirn:

- Keine isolierten Teilnetze im Gehirn. Umgebung verursacht „rauschen“.
- Kanalproteine unterliegen thermischen Fluktuationen: Spontanes Feuern.

Qualitatives Verhalten der BM

Abhängigkeit von T:

- $T \rightarrow 0 \;\Rightarrow$ Diskretes Hopfield Modell
- $T > 0 \;\Rightarrow\; p_i > 0$ auch für $\sum_{j=0}^{n} w_{ij}x_j - \Theta_i < 0$
  Neuronen können auch feuern wenn Schwellenwert nicht erreicht wurde

Analogie zum Gehirn:

- Keine isolierten Teilnetze im Gehirn. Umgebung verursacht „rauschen“.
- Kanalproteine unterliegen thermischen Fluktuationen: Spontanes Feuern.

Zusammenfassung

- Im Gehirn liegt massive Rückkopplung vor. Daher spielt die Dynamik und Stabilität von Neuronalen Netzen eine wichtige Rolle.
- Für Assoziative Netze existieren Energiefunktionen. Aus ihnen lassen Erkenntnisse über das dynamische Verhalten des Netzes gewinnen.
- Lokale Minima -„Störungen“- lassen sich durch stochastische Fluktuationen verlassen.